数理解析研究所講究録
632巻 1987年 134-173

Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients

東北大理 谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

§0. 序

$\boxed{0.1}$ 本稿では，半単純Lie環の最高weight加群及び包絡環のprimitive quotientの特性多様体について述べる。特に包絡環のprimitive idealはその特性多様により特徴付けられるのではないかというBorho-Brylinskiの問題([BoB2])について考察する。

$\boxed{0.2}$ まず話の出発点になるBeilinson-Bernstein圏同値について述べる。Gを$\mathbb{C}$上の連結半単純Lie群，$\mathfrak{g}$をそのLie環，$U(\mathfrak{g})$を$\mathfrak{g}$の包絡環とする。またXをGの旗多様体とし$\mathcal{D}_X$をX上の線形微分作用素のなす環の層とする。GのXへの自然な作用により環準同型写像$U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$が導びかれる。よって$U(\mathfrak{g})$-加群$M$に対して$\mathcal{D}_X$-加群(の層)
$\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ が定まる。

「<u>Prop. 0.1</u> ([BeB]) 対応$M \rightsquigarrow \mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$は，自明な中心指標を持つ有限生成$U(\mathfrak{g})$-加群のつくるabel圏と，連接的$\mathcal{D}_X$-加群のつくるabel圏の同値を導びく。■

$\boxed{0.3}$ 有限生成$U(\mathfrak{g})$-加群Mに対してその随伴多様体(associated variety) $V(M)$が，$\mathfrak{g}$の双対空間$\mathfrak{g}^*$の部分代数

多様体として定義される。以下しばしば Killing 形式により $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ を同一視して $\mathcal{V}(M)$ を $\mathfrak{g}$ の部分代数多様体と思う。また連接的 $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ に対してその特性多様体 (characteristic variety) $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ が余接束 T^*X の部分代数多様体として定義される。$\mathcal{V}(M)$, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ の定義は例えば [BoB2] を参照されたい。自明な中心指標をもつ有限生成 $U(\mathfrak{g})$-加群 M に対して $\mathrm{Ch}(\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M)$ を単に $\mathrm{Ch}(M)$ と書く。$\mathrm{Ch}(M)$ と $\mathcal{V}(M)$ の関係は次のとおり。$T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ を G の X への作用から導かれる自然な写像とする (moment map)。このとき,

「Prop. 0.2 ([BoB2]) M が自明な中心指標をもつ有限生成 $U(\mathfrak{g})$-加群なら, $\mathcal{V}(M) = \gamma(\mathrm{Ch}(M))$ である。」

$\boxed{0.4}$ 以下の目的は, 自明な中心指標をもつ既約な最高 weight 加群 L, あるいは自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I による $U(\mathfrak{g})$ の商 $U(\mathfrak{g})/I$ についてその随伴多様体及び特性多様体を考察する事である。$\mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I)$ がどうなるかは知られている (Prop. 2.6, Joseph, 堀田, Borho-Brylinski)。$\mathcal{V}(L)$ を全ての L について求める事と, $\mathrm{Ch}(U(\mathfrak{g})/I)$ を全ての I について求める事は同値である (Prop. 1.4, Borho-Brylinski)。よって問題は

「Problem 0.3 自明な中心指標をもつ既約最高 weight 加群 L に対して $\mathrm{Ch}(L)$ を決定せよ。」

「Problem 0.4　自明な中心指標をもつ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I に対して $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定せよ。」

上に述べた事から Problem 0.3 が解ければ Problem 0.4 も解ける事になる。

$\boxed{0.5}$　G が A_n 型のときには Problem 0.3, 0.4 の答は予想されており $n \leqq 5$ で確かめられている (§3.1)。しかし一般の場合の予想はまだない。

本稿では Problem 0.3, 0.4 に関して知られている幾つかの部分的結果を組み合わせて，G の rank が 3 以下のときに $Ch(L)$ 及び $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ を決定する。Borho－Brylinski ([BoB2]) は $Ch(U(\mathfrak{g})/I)$ が常に既約であろうと予想したが，我々の計算から B_3, C_3 型で反例が存在する事もわかる。また本稿ではこの Borho－Brylinski 予想の一つの修正案を提出する (Conjecture 4.1)。これが正しければ次の予想が正しい事がわかる。

「Conjecture 0.5　自明な中心指標を持つ $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal 全体の集合を $\mathfrak{X}_0$ とする。

(i) $I_1, I_2 \in \mathfrak{X}_0$ に対して $Ch(U(\mathfrak{g})/I_1) = Ch(U(\mathfrak{g})/I_2)$ ならば $I_1 = I_2$ である。

(ii) $\mathfrak{X}_0$ と $\displaystyle\coprod_{O \in Nilp_{sp}} Irr(\overline{O \cap \mathfrak{n}^+})$ の間に自然な一対一対応がある。ここで $Nilp_{sp}$ は $\mathfrak{g}$ の特殊巾零共役類の集合 (§2.3),

$\mathfrak{n}^+$はGのひとつのBorel部分群のunipotent radicalのLie環,
$\mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+})$は$\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+}$の既約成分の集合である。∎

§1. 特性多様体

$\boxed{1.1}$ GのBorel部分群B及びBに含まれるGの極大Torus Hをとり固定する。$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$をそれぞれB, HのLie環とする。Δを$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$のroot系, Δ^+を$\mathfrak{b}$に対応する正rootの全体として$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha\in\mathfrak{h}^*$とおく。WをWeyl群とする。$w\in W$に対して$-w\rho-\rho$を最高weightに持つVerma加群を$M_w$, その既約商を$L_w$とする。自明な中心指標をもつ有限生成$U(\mathfrak{g})$-加群であってB-作用をもつもののつくるabel圏を$\mathcal{O}_0$と書く。M_w, L_wは$\mathcal{O}_0$の対象で, $\mathcal{O}_0$のGrothendieck群$K(\mathcal{O}_0)$は,

$$K(\mathcal{O}_0)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[M_w]=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[L_w]$$

と分解される。

$\boxed{1.2}$ BのunipotentradicalのLie環を$\mathfrak{n}^+$とする。またX=G/BのB-軌道への分解を$X=\coprod_{w\in W}X_w$ $(X_w=BwB/B)$とする。$M\in\mathcal{O}_0$ならば$V(M)$は$\mathfrak{n}^+$の部分代数多様体である。よって$Ch(M)\subset\gamma^{-1}(V(M))\subset\gamma^{-1}(\mathfrak{n}^+)=\coprod_{w\in W}T^*_{X_w}X=\bigcup_{w\in W}\overline{T^*_{X_w}X}$。ここで$T^*_{X_w}X$は$X_w$の余法束とする。特性多様体の包含性により$Ch(M)$の任意の既約成分はある$w\in W$に対する$\overline{T^*_{X_w}X}$と一致

する。$Ch(M)$ の各既約成分での重複度をこめて考えると，M の特性 cycle (characteristic cycle) $\underline{\underline{Ch}}(M) \in \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\overline{T^*_{X_w}X}]$ が定義される。$\underline{\underline{Ch}}$ の加法性により，$\underline{\underline{Ch}}$ は $\mathbb{Z}$-線形写像

$$K(\mathcal{O}_a) \xrightarrow{\underline{\underline{Ch}}} \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\overline{T^*_{X_w}X}]$$

に拡がる。$\underline{\underline{Ch}}(L_w) = \sum_{y\in W} m(y,w)[\overline{T^*_{X_y}X}]$ により $m(y,w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を定めて $\Sigma(w) = \{y \in W \mid m(y,w) > 0\}$ とおくと，$Ch(L_w) = \bigcup_{y\in\Sigma(w)} \overline{T^*_{X_y}X}$ である。

$\boxed{1.3}$ Prop. 0.1 により，$\mathcal{O}_0$ は，連接的 $\mathcal{D}_X$-加群であってB-作用をもつものの作るabel圏 $\mathcal{M}$ と同値である。§1.2 により $\mathcal{M}$ の対象が holonomic になる事は明らかだが，さらに regular holonomic になる事がわかる ([BK])。実際 $\partial X_w = \overline{X_w} - X_w$ とおくとき，$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_w \cong {}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ である。ここで $\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w} = \underline{H}^{\operatorname{codim} X_w}_{X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$，${}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ はその minimal extension である。

W 上の Bruhat order を $\leq$ と書く ($y \leq w \Leftrightarrow X_y \subset \overline{X_w}$)。また W の単純鏡影の全体を S とする。$w \in W$ に対して $\mathcal{L}(w) = \{s \in S \mid sw < w\}$，$R(w) = \{s \in S \mid ws < w\} = \mathcal{L}(w^{-1})$ とおく。

Lemma 1.1

(i) $w \in \Sigma(w)$ で $m(w,w) = 1$。

(ii) $y \in \Sigma(w)$ なら $y \leq w$。

(iii) $y < w$ とする。X_y が $\overline{X_w}$ 中で non-singular ならば，

$m(y,w)=0$。特に w が W の放物型部分群の最長元なら $\Sigma(w)=\{w\}$。

(iv) $y\in\Sigma(w)$ なら $\mathcal{S}(y)\supset\mathcal{S}(w)$。┘

(証明) (i),(ii),(iii) は $\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}L_w\cong{}^{\pi}\mathcal{B}_{X_w|X-\partial X_w}$ により明らか。(iv) は次から従う。B を含む放物型部分群で Levi part の Weyl 群が $W_1=\langle\mathcal{S}(w)\rangle$ となるものを P とすると，X の P-軌道への分解は $X=\coprod_{y\in W_1\backslash W}(PyB/B)$ で与えられ，これは X の Whitney stratification になる。また X_y が PyB/B 中で open になるための条件は $\mathcal{S}(y)\supset\mathcal{S}(w)$ である。■

$\boxed{1.4}$ G の $X\times X$ への対角型作用の軌道分解は $X\times X=\coprod_{w\in W}D_w$ ($D_w=G\cdot(eB,wB)$) で与えられる。$X\times X$ から第一成分への射影により $X\times X$ を $X=G/B$ 上の fiber 束と思うとき，$X\times X\cong G\overset{B}{\times}X$，また $D_w=G\overset{B}{\times}X_w$ である。よって連接的 $\mathcal{D}_{X\times X}$-加群であって G-作用をもつもののつくる abel 圏を $\mathcal{N}$ と書くと，$\mathcal{N}\xrightarrow[\sim]{i^*}\mathcal{M}$ である。ここで $X\xhookrightarrow{i}X\times X$ は $i(gB)=(eB,gB)$ により与えられるものとする。$\mathcal{M}_w,\mathcal{L}_w\in\mathcal{N}$ を $i^*(\mathcal{M}_w)=\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}M_w$，$i^*(\mathcal{L}_w)=\mathcal{D}_X\otimes_{U(\mathfrak{g})}L_w$ により定める。$\mathcal{L}_w\cong{}^{\pi}\mathcal{B}_{D_w|(X\times X)-\partial D_w}$ がわかる。$\mathcal{M}\in\mathcal{N}$ ならば $Ch(\mathcal{M})\subset\bigcup_{w\in W}\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}$ である。$Z_w=\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}$ とおくと§1.2 と同様にして $K(\mathcal{N})\xrightarrow{Ch}\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Z}[Z_w]$ が定まり

$$\begin{tikzcd}
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{ch}}"] \arrow[d] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] \arrow[d] \\
K(\mathcal{O}_0) \arrow[r, "\underline{\underline{ch}}"] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\overline{T^*_{X_w}X}]
\end{tikzcd}$$

は可換である。ここで左のタテ方向の写像は $\mathcal{N} \xrightarrow{i^*} \mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_0$ により導びかれる同型写像、右のタテ方向の写像は $[Z_w] \mapsto [\overline{T^*_{X_w}X}]$ により定まる $\mathbb{Z}$-線型写像である。特に $\underline{\underline{ch}}(\mathcal{L}_w) = \sum_{y\in W} m(y,w)[Z_w]$ となる。さて $X\times X \xrightarrow{j} X\times X$ ($(g_1B, g_2B) \mapsto (g_2B, g_1B)$) はG-作用を保つ同型写像で $j(D_w)=D_{w^{-1}}$。よって $j^*(\mathcal{L}_w)=\mathcal{L}_{w^{-1}}$。さらに

$$\begin{tikzcd}
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{ch}}"] \arrow[d, "j^*"'] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] \arrow[d] \ni [Z_w] \arrow[d, mapsto] \\
K(\mathcal{N}) \arrow[r, "\underline{\underline{ch}}"] & \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[Z_w] \ni [Z_{w^{-1}}]
\end{tikzcd}$$

が可換な事から次がわかる。

「<u>Lemma 1.2</u> $m(y,w)=m(y^{-1},w^{-1})$。特に $\Sigma(w)=(\Sigma(w^{-1}))^{-1}$、よって $y\in\Sigma(w)$ なら $R(y)\supset R(w)$ である。」

$\boxed{1.5}$ Weyl 群の左 cell 等の概念について復習する([J1], [KL1] 参照)。$K(\mathcal{O}_0)$ 中で $[L_w]=\sum_{y\in W} a(y,w)[M_y]$ とする。整数 $a(y,w)$ は(少なくとも原理的には)計算可能である(Kazhdan-Lusztig 予想 [KL1]。[BeB], [BK] により証明された。)。そこで $a(w)=\sum_{y\in W} a(y,w)\,y \in \mathbb{C}[W]$ とおくと、$\mathbb{C}[W]=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}\,a(w)$。$\{a(w) \mid w\in W\}$ のある部分集合で張られ

ような$\mathbb{C}[W]$の部分空間を"a-基底型部分空間"と呼ぶ。$w\in W$に対して$a(w)$を含むa-基底型部分空間のうちでWの左作用に関して不変な最小のものを$\overline{V}^L_w$と書く。またW上のpreorder $\underset{L}{\geq}$及び同値関係$\underset{L}{\sim}$を、$[w\underset{L}{\geq}y \Leftrightarrow \overline{V}^L_w\supset \overline{V}^L_y]$, $[w\underset{L}{\sim}y \Leftrightarrow \overline{V}^L_w=\overline{V}^L_y]$により定める。$\underset{L}{\sim}$の同値類を左cellといい、$V^L_w := \overline{V}^L_w \Big/ \sum_{\overline{V}^L_y \subsetneqq \overline{V}^L_w} \overline{V}^L_y$ 上のWの表現を左cell表現という。wを含む左cellを$\mathcal{C}^L_w$と書くと$\mathcal{C}^L_w$に対応してV^L_wの基底が定まる。下線部のWの左作用をWの右作用（あるいは$W\times W$の両側作用）に置き換えて、$\overline{V}^R_w$, $\underset{R}{\geq}$, $\underset{R}{\sim}$, V^R_w, $\mathcal{C}^R_w$（あるいは$\overline{V}^{LR}_w$, $\underset{LR}{\geq}$, $\underset{LR}{\sim}$, V^{LR}_w, $\mathcal{C}^{LR}_w$）が全く同様に定義される。

1.4と同様の議論から（あるいはKazhdan-Lusztig予想から）$a(y,w)=a(y^{-1},w^{-1})$がわかるので$w\underset{L}{\geq}y \Leftrightarrow w^{-1}\underset{R}{\geq}y^{-1}$. また$w\underset{L}{\sim}y\Leftrightarrow w^{-1}\underset{R}{\sim}y^{-1}$である。$W$の既約表現の同型類の集合を$\hat{W}$と書く。$W$の既約表現は全て自己双対的なので$W\times W$-加群として$\mathbb{C}[W]\cong\bigoplus_{\sigma\in\hat{W}}(\sigma\otimes\sigma)$である。これから$w\underset{LR}{\sim}w^{-1}$がわかる。

$\boxed{1.6}$ 自明な中心指標をもつ$U(\mathfrak{g})$のprimitive ideal全体の集合を$\mathfrak{X}_0$とする。すなわち$\mathfrak{X}_0=\{\mathrm{Ann}\,M \mid M$は自明な中心指標を持つ既約$U(\mathfrak{g})$-加群$\}$, ここで$\mathrm{Ann}\,M=\{u\in U(\mathfrak{g})\mid u\cdot M=0\}$である。$I_w=\mathrm{Ann}\,L_w$とおくとDuflo [D]により$\mathfrak{X}_0=\{I_w \mid w\in W\}$が知られている。さらに、

「**Prop. 1.3** ([J1], [V]) $I_w \subset I_y \Leftrightarrow w \geqq_L y$, 特に $I_w = I_y \Leftrightarrow w \sim_L y$ である。」

よって $\mathcal{X}_0 \simeq W/\sim_L$ である。

$\boxed{1.7}$ T^*X は $X=G/B$ 上の fiber 束として $G\times^B \mathfrak{n}^+$ と自然に同型である。I_w は $U(\mathfrak{g})$ の両側 ideal なので $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w)$ は T^*X の G-不変部分代数多様体である。

「**Prop. 1.4** ([BoB2]) $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w) = G \times^B V(L_{w^{-1}})$ $(\forall w \in W)$」

よって次がわかる。

「**Corollary 1.5** ([J3], [BoB2]) $w \geqq_R y \Rightarrow V(L_w) \supset V(L_y)$, 特に $w \sim_R y \Rightarrow V(L_w) = V(L_y)$」

§2. Weyl 群の表現との関係

$\boxed{2.1}$ $\mathfrak{g}$ の巾零共役類の集合を Nilp と書く。$\mathcal{O} \in$ Nilp に対して、$\mathcal{O}$ 上の G-作用を持つ既約局所系の同型類の集合を $\mathcal{S}_\mathcal{O}$ と書く。$x \in \mathcal{O}$ をひとつ固定するとき、$\mathcal{S}_\mathcal{O}$ は $A(x) = Z_G(x)/Z_G(x)^\circ$ の既約表現の同型類の集合 $\hat{A}(x)$ と自然に一対一に対応する。これを $\mathcal{S}_\mathcal{O} \xleftrightarrow{\sim} \hat{A}(x)$ $(\xi \leftrightarrow \chi_\xi)$ とする。$\dim X = d$ とおくと $X_x = \{gB \in X \mid x \in g\cdot\mathfrak{n}^+\}$ は純次元 $d_\mathcal{O} := d - \frac{1}{2}\dim\mathcal{O}$ を持つ([Spa])。X_x の top homology 群 $H_{2d_\mathcal{O}}(X_x) = (H_c^{2d_\mathcal{O}}(X_x, \mathbb{C}))^*$ には W の作用が定義されて、$A(x)$ の自然な作用と可換である(Springer 表現, [Spr] 参照)。$W \times A(x)$-

加群として $H_{2d_0}(X_x)=\bigoplus_{\xi\in\mathcal{S}_0}(\tau_{(O,\xi)}\otimes\chi_\xi)$ （$\tau_{(O,\xi)}$ は W-加群）と分解するとき，$\tau_{(O,\xi)}$ は (0) または既約 W-加群になる。さらに $\overline{\mathcal{S}}_0=\{\xi\in\mathcal{S}_0\mid\tau_{(O,\xi)}\neq(0)\}$ とおくとき，

$\coprod_{O\in\mathrm{Nilp}}\overline{\mathcal{S}}_0\longrightarrow\widehat{W}$ （$\overline{\mathcal{S}}_0\ni\xi\mapsto\tau_{(O,\xi)}\in\widehat{W}$）は全単射である。

$\xi=\mathbb{C}_0$ のとき，すなわち χ_ξ が単位表現のときは明らかに $\tau_{(O,\xi)}\neq(0)$。これを $\mathrm{Sp}(O)$ と書く。

一般に純次元代数多様体 Y の既約成分の集合を $\mathrm{Irr}(Y)$ と書く。$D=\{(y,gB)\in O\times X\mid y\in g\mathfrak{n}^+\}$ を $X=G/B$ 上の fiber 束とみると $D\cong G\overset{B}{\times}(O\cap\mathfrak{n}^+)$，$O=G/Z_G(x)$ 上の fiber 束とみると $D\cong G\overset{Z_G(x)}{\times}X_x$ である。よって $\mathrm{Irr}(X_x)$ から $\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})\simeq\mathrm{Irr}(O\cap\mathfrak{n}^+)\simeq\mathrm{Irr}(D)$ への全射

$$(2.1)\qquad \mathrm{Irr}(X_x)\xrightarrow{\ \mathcal{R}\ }\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$$

が定義されて，各点の逆像はひとつの $A(x)$-軌道になる。

よって $\mathrm{Irr}(X_x)/_{A(x)}\simeq\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$。$\mathrm{Sp}(O)=H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ なので，$Y\in\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$ に対して $g_Y:=\sum_{C\in\mathcal{R}^{-1}(Y)}[C]\in H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ とおくと，$\{g_Y\mid Y\in\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})\}$ は $\mathrm{Sp}(O)$ の基底となる。特に $\dim\mathrm{Sp}(O)=\#(\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+}))$ である。

$\boxed{2.2}$ $w\in W$ に対して Joseph の Goldie rank 多項式（[J2]）を P_w とする。すなわち $P_w=\sum_{y\in W}a(y,w)(y^{-1}\rho)^{m_w}\in S^{m_w}(\mathfrak{h}^*)$。ここで m_w は右辺が non-zero になる最小の非負整数，また $S^{m_w}(\mathfrak{h}^*)$ は $\mathfrak{h}^*$ の m_w 次対称テンソルのなす空間

である。

「<u>Prop. 2.2</u> ([J 2])

(i) $\mathbb{C}P_w = \mathbb{C}P_y \Leftrightarrow w \underset{L}{\sim} y$

(ii) $w \underset{LR}{\sim} y$ なら $m_w = m_y$。

(iii) $\sigma(w) := \sum_{y \in \mathcal{C}_w^{LR}} \mathbb{C}P_y$ は W−不変でしかも既約である。

(iv) $\sigma(w) = \bigoplus_{y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{L}{\sim}} \mathbb{C}P_y$

(v) $\dim \mathrm{Hom}_W(\sigma(w), S^m(\mathfrak{g}^*)) = \begin{cases} 0 & m < m_w \\ 1 & m = m_w \end{cases}$

(vi) $\sigma(w) \cong \sigma(y) \Leftrightarrow w \underset{LR}{\sim} y$ 」

よって $W/\underset{LR}{\sim} \hookrightarrow \hat{W}$ が $w \longmapsto \sigma(w)$ により定まる。この像を $\hat{W}_{sp}$ と書く。$\hat{W}_{sp}$ は Lusztig により定義された"特殊表現"の全体と一致する([BV 1, 2])。

$\boxed{2.3}$ ある $\mathcal{O} \in \mathrm{Nilp}$ に対して $\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+}$ の既約成分になっているような $\mathfrak{n}^+$ の部分代数多様体を,($\mathcal{O}$ に付随した)軌道的多様体 (orbital variety) と言う。$w \in W$ に対して $Y^{\ell}(w) = \overline{B \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w^{-1}\mathfrak{n}^+)}$, $Y^{r}(w) = \overline{B \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+)}$ とおく。また $\mathcal{O}_w^{\ell r} \in \mathrm{Nilp}$ を $\overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} = \overline{G \cdot (\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+)}$ により定める。$Y^{\ell}(w)$, $Y^{r}(w)$ は $\mathcal{O}_w^{\ell r}$ に付随した軌道的多様体である。また任意の軌道的多様体はある $w \in W$ に対する $Y^{r}(w)$ と一致する([St])。

柏原, Gabber の純次元性定理([J 3, 4] 参照)により $V(L_w)$ は純次元である。また $V(L_w) = \gamma(\mathrm{Ch}(L_w)) = \bigcup_{y \in Z(w)} \gamma(\overline{T^*_{X_y} X}) = \bigcup_{y \in Z(w)} Y^{r}(w)$

により，$\mathcal{V}(L_w)$ の既約成分は軌道的多様体である。

Joseph [J3] は軌道的多様体（あるいはより一般に $\mathfrak{n}^+$ の H-不変部分代数多様体）Y に対して $P_Y \in S^{d-\dim Y}(\mathfrak{h}^+)$ を定義した（$Y \in \mathrm{Irr}\,\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+}$ ならば $\dim Y = \frac{1}{2}\dim\mathcal{O}$，よって $d-\dim Y = d_{\mathcal{O}}$）。

「<u>Prop. 2.3</u>（[J3]）$P_{w^{-1}} = \sum_{Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{V}(L_w))} \ell_Y P_Y$ （$\exists \ell_Y > 0$）」

さて Borho-MacPherson [BM] により

$$\dim \mathrm{Hom}_W(Sp(\mathcal{O}), S^m(\mathfrak{h}^+)) = \begin{cases} 0 & m < d_{\mathcal{O}} \\ 1 & m = d_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

が知られている。

「<u>Prop. 2.4</u>（[H]）W-加群としての単射準同型 $Sp(\mathcal{O}) \longrightarrow S^{d_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{h}^+)$ が $q_Y \longmapsto P_Y$（$Y\in \mathrm{Irr}\,\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+}$）により定まる。」

Prop. 2.2, 2.3, 2.4 により $\hat{W}_{sp}$ は $\mathrm{Nilp} \overset{Sp}{\hookrightarrow} \hat{W}$ の像に入る事がわかる。$\mathrm{Nilp}_{sp} = \{\mathcal{O}\in \mathrm{Nilp} \mid Sp(\mathcal{O}) \in \hat{W}_{sp}\}$ に入る巾零共役類を特殊巾零共役類という。$W/\underset{LR}{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nilp}_{sp}$ ($w \longmapsto \mathcal{O}_w^{LR}$) が $Sp(\mathcal{O}_w^{LR}) = \sigma(w)$ により定まる。また以上の議論から，

「<u>Prop. 2.5</u> $\mathrm{Irr}(\mathcal{V}(L_w)) \subset \mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}_w^{LR}\cap\mathfrak{n}^+})$ （$\forall w\in W$）」

よって Prop 0.2, 1.4, 2.5 により

「<u>Prop 2.6</u>（Borho-Brylinski, Joseph, Hotta 両[KT], [Gi]参照）
$\mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I_w) = \overline{\mathcal{O}_w^{LR}}$ （$\forall w\in W$）」

$\mathcal{V}(U(\mathfrak{g})/I_w)$ の既約性は，はじめ Borho により予想され

た。まず [BoB 1] で case by case の証明が与えられ、その後上述のような統一的証明も得られた。尚 Joseph [J 4] は Prop. 1.4 を用いず、別の方法により Prop. 2.6 を示した。

またProp. 0.2, 2.5 により次が従う。

Lemma 2.7 $V(L_w)=\bigcup_{y\in\Sigma(w)} Y^r(y)=\bigcup_{\substack{y\in\Sigma(w)\\ O_y^{\ell r}=O_w^{LR}}} Y^r(y)$

$\boxed{2.4}$ $Z=\bigcup_{w\in W} Z_w$ $\left(Z_w=\overline{T^*_{D_w}(X\times X)}\right)$ は純次元 $2d$ を持つ ($d=\dim X$)。[KL2] により $H_{4d}(Z)$ には $W\times W$-加群の構造が入る。$W\times W$-加群としての同型写像 $H_{4d}(Z)\xrightarrow{f}\mathbb{C}[W]$ が $f([Z_e])=e$ により定まる。$f([Z_w])=b(w)$ とおくと、$\{b(w)\mid w\in W\}$ は $\mathbb{C}[W]$ の基底になる。

Lemma 2.8 ([KL2]) $s\in S$, $w\in W$ とする。

(i) $sw<w$ なら $sb(w)=-b(w)$

(ii) $sw>w$ なら $sb(w)=b(w)+b(sw)+\sum_{sy<y<sw}\delta_s(y,w)\,b(y)$,

ここで $\delta_s(y,w)$ はある非負整数である。

$\mathbb{C}[W]$ の部分空間であって $\{b(w)\mid w\in W\}$ のある部分集合により張られるものを b-基底型部分空間と呼ぶ。§1.5 の議論で a-基底型部分空間の代わりに b-基底型部分空間を用いる事により、$\overline{V}^L_w$, $\geqq_L$, $\sim_L$, V^L_w, C^L_w, $\cdots$, C^{LR}_w に対応するものが定義される。これらを $\overline{V}^\ell_w$, $\geqq_\ell$, $\sim_\ell$, V^ℓ_w, C^ℓ_w, $\cdots$, $C^{\ell r}_w$ とする。

「Lemma 2.9 ([KL2]) $x \in O \in Nilp$ とするとき，

$\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O}} \mathbb{C} b(w)$ $(\subset \mathbb{C}[W])$ は $W \times W$-不変で，$W \times W$-加群として

$$\Big(\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O}} \mathbb{C} b(w)\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{O_w^{\ell r} \subset \bar{O}-O} \mathbb{C} b(w)\Big) \cong \big(H_{2d_O}(X_x) \otimes H_{2d_O}(X_x)\big)^{A(x)}$$

$$\cong \bigoplus_{\xi \in \mathcal{S}_O} \big(T_{(O,\xi)} \otimes T_{(O,\xi)}\big)$$ 」

Lemma 2.9 と同様の証明で次がわかる。

「Lemma 2.10 Y が軌道的多様体ならば，$\bigoplus_{Y^\ell(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$ (resp. $\bigoplus_{Y^r(w) \subset Y} \mathbb{C} b(w)$) は W の左作用 (resp. 右作用) で不変である。特に $w \geqq_\ell y$ (resp. $w \geqq_r y$) ならば $Y^\ell(w) \supset Y^\ell(y)$ (resp. $Y^r(w) \supset Y^r(y)$) である。」

次の Lemma の成立の可能性は Joseph により筆者に指摘された。証明は appendix を参照。

「Lemma 2.11

(i) $w \underset{\ell}{\sim} y \Longleftrightarrow Y^\ell(w) = Y^\ell(y)$

(ii) $w \underset{r}{\sim} y \Longleftrightarrow Y^r(w) = Y^r(y)$

(iii) $w \underset{\ell r}{\sim} y \Longleftrightarrow O_w^{\ell r} = O_y^{\ell r}$ 」

$\boxed{2.5}$ $X \times X \times X \xrightarrow{p_{ij}} X \times X$ を (i,j) 成分への射影とする。

$K(\mathcal{N})$ 上の積を

$$[\mathcal{M}_1] \cdot [\mathcal{M}_2] = \sum_i (-1)^i \big[\underline{H}^i\big(\int_{p_{13}} (p_{12}^* \mathcal{M}_1) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_{X \times X \times X}}{\otimes}} (p_{23}^* \mathcal{M}_2)\big)\big]$$

$$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{N})$$

により与えると，$K(\mathcal{N})$ は $\mathbb{Z}$ 上の algebra になり，$\mathbb{Z}$-algebra

としこの同型 $K(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[W]$ が $[\mathcal{M}_w] \longleftrightarrow w$ により定まる([LV])。特に $K(\mathcal{M})$ は $W\times W$-加群になる。

「<u>Prop. 2.12</u> ([KT], [T2])

$$K(\mathcal{M})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Ch}} H_{4d}(Z)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{C}[Z_w]$$

は $W\times W$-加群としての同型写像である。」

<u>Ch</u>$(\mathcal{M}_e)=[Z_e]$ なので、これは

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathrm{Ch}} & H_{4d}(Z) \\ \wr\!\!\mid & & \wr\!\!\downarrow s \\ \mathbb{Z}[W] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[W] \end{array}$$

が可換である事と同値である。さらにこれは次とも同値。

「<u>Lemma 2.13</u> $a(w)=\sum_{y\in W} m(y,w)\, b(y)$」

§3. <u>具体例</u>

$\boxed{3.1}$ <u>A_n</u>

次が予想されている([KT], [BoB2])。

「<u>Conjecture 3.1</u> G が A_n 型なら任意の $w\in W$ に対して $\mathrm{Ch}(L_w)=\overline{T^*_{X_w}X}$。すなわち $\Sigma(w)=\{w\}$。」

「<u>Conjecture 3.2</u> G が A_n 型なら任意の $w\in W$ に対して $V(L_w)=\mathcal{V}(w)$」

Conjecture 3.1 から Conjecture 3.2 が従う事は明らか。また Conjecture 3.1 は [KL2] 中のある予想と同値である事が

Lemma 2.13 からわかる。上の予想は $n \leqq 5$ で確かめられている。

$\boxed{3.2}$ $V(L_w)$ for C_2, C_3

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \quad J_n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & T_n \\ \hline -T_n & 0 \end{array}\right] \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

$$\mathfrak{g} = \{ x \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t x J_n + J_n x = 0 \}$$

$\mathfrak{b} = \{ \mathfrak{g}$ に含まれる上三角行列$\}$ $\mathfrak{n}^+ = \{ x \in \mathfrak{b} \mid$ 対角成分が全て$0\}$

とおくと，$\mathfrak{g}$ は C_n 型の単純 Lie 環，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環，$\mathfrak{n}^+$ は $\mathfrak{b}$ に対応する Borel 部分群の unipotent radical の Lie 環である。また Weyl 群 W は $2n$ 個の文字 $\{\pm 1, \pm 2, \cdots \pm n\}$ の置換 w で $w(-i) = -w(i)$ $({}^\forall i)$ を満たすもの全体と同一視される。$w(i) = a_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ のとき $w = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と書く。

$s_1 = (-1, 2, 3, \cdots, n)$, $s_2 = (2, 1, 3, 4, \cdots, n)$, ……, $s_n = (1, 2, \cdots, n-2, n, n-1)$

とおくと $S = \{ s_1, \cdots, s_n \}$ が単純鏡影全体になる。

自然数 m の分割の集合を P_m と書く。すなわち $P_m = \{ (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots m^{m_m}) \mid \sum_{i=1}^{m} i m_i = m \}$。また $P_{2n}^c = \{ (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots) \in P_{2n} \mid i$ が奇数なら m_i は偶数$\}$ とおく。$\sigma = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots) \in P_m$ に対して，$M_m(\mathbb{C})$ 中の巾零行列であってその Jordan 標準形における i 次 Jordan block の数が m_i 個であるようなもの全体を C_σ と書く。よく知られているように，$\sigma \in P_{2n}$ に対して $C_\sigma \cap \mathfrak{g}$ が空でないための条件は，$\sigma \in P_{2n}^c$ となる事である。また $\sigma \in P_{2n}^c$ に対して $O_\sigma = C_\sigma \cap \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 中の一つの巾零共役類をなす。よってこの

場合 $\mathrm{Nilp} \simeq P_{2m}^{C}$。また $\sigma \in P_{2m}^{C}$ に対して $\overline{O_\sigma} = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{g}$ が知られている。よって $\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \overline{O_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+ = \overline{C_\sigma} \cap \mathfrak{m}^+$。$\sigma \in P_m$ に対して、$M_m(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の族 $\{f_i^\sigma \mid i \in I_\sigma\}$ であって $\overline{C_\sigma} = \{x \in M_m(\mathbb{C}) \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ なるものが，[T3]で具体的に与えられている。よって $\sigma \in P_{2m}^{C}$ のとき，$\overline{O_\sigma \cap \mathfrak{m}^+} = \{x \in \mathfrak{m}^+ \mid f_i^\sigma(x) = 0 \ (\forall i \in I_\sigma)\}$ となる。この事を用いて C_2, C_3 のときの軌道的多様体を具体的に計算すると次のとおり。Nilp と P_{2m}^{C} $(m=2,3)$ を同一視し，$(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ に対応する巾零共役類に付随する軌道的多様体を $(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)_1, (1^{m_1}2^{m_2}\cdots)_2, \cdots$ により表わす。

(i) C_2

$$\mathrm{Nilp} = \{(4), (2^2), (1^2 2), (1^4)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \middle|\ a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(4)_1 = \mathfrak{m}^+$ • $(2^2)_1 = \{a=0\}$, $(2^2)_2 = \{d=0\}$
- $(1^2 2)_1 = \{a=0,\ c^2 - bd = 0\}$ • $(1^4)_1 = \{0\}$

(ii) C_3

$$\mathrm{Nilp} = \{(6), (24), (1^2 4), (3^2), (2^3), (1^2 2^2), (1^4 2), (1^6)\}$$

$$\mathfrak{m}^+ = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & b & f & e & d \\ 0 & 0 & c & h & g & e \\ 0 & 0 & 0 & k & h & f \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \middle|\ a,\cdots,k \in \mathbb{C} \right\}$$

- $(6)_1 = \mathfrak{n}^+$
- $(24)_1 = \{a=0\}$, $(24)_2 = \{c=0\}$, $(24)_3 = \{k=0\}$
- $(1^2 4)_1 = \left\{ a=0,\ \det\begin{bmatrix} b & f & e & d \\ c & h & g & e \\ 0 & k & h & f \\ 0 & 0 & -c & -b \end{bmatrix} = 0 \right\}$, $(1^2 4)_2 = \left\{ \begin{array}{l} c=0 \\ h^2-gk=0 \end{array} \right\}$
- $(3^2)_1 = \{c=0,\ a^2g+2abh+b^2k=0\}$, $(3^2)_2 = \{a=k=0\}$

  $(3^2)_3 = \{k=0,\ ag+2bh-2cf=0\}$
- $(2^3)_1 = \{a=b=c=0\}$, $(2^3)_2 = \{a=k=0,\ bh-cf=0\}$

  $(2^3)_3 = \{c=0,\ h^2-gk=0,\ ag+bh=0,\ ah+bk=0\}$
- $(1^2 2^2)_1 = \{a=b=c=0,\ f^2g+h^2d+e^2k-gkd-2ehf=0\}$

  $(1^2 2^2)_2 = \{c=k=h=g=0\}$

  $(1^2 2^2)_3 = \left\{ \begin{array}{l} a=k=0,\ bh-cf=0,\ f^2g+h^2d-2ehf=0 \\ b^2g+c^2d-2bce=0,\ bgf+chd-cef-beh=0 \end{array} \right\}$
- $(1^4 2)_1 = \left\{ \begin{array}{l} a=b=c=0,\ fg-eh=fh-ke=fe-hd=0 \\ \qquad f^2-kd=e^2-gd=h^2-gk=0 \end{array} \right\}$
- $(1^6)_1 = \{0\}$

軌道的多様体の　　包含関係は表1,表2のようになる。$Y^\ell(w)$ (resp. $Y^r(w)$) は $\mathfrak{n}^+ \cap w^{-1}\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^+ \cap w\mathfrak{n}^+$) を含む最小の軌道的多様体なので簡単に計算できる(表8, 表10)。

次に W の右 cell, 両側 cell は次のようになる。

(i) <u>C_2</u>　$s=s_1$, $t=s_2$ とおく。$\mathcal{C}_1=\{e\}$, $\mathcal{C}_{21}=\{t, ts, tst\}$ $\mathcal{C}_{22}=\{s, st, sts\}$, $\mathcal{C}_3=\{stst\}$ の4つが右 cell であり、$\mathcal{C}_1$,

$\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_{21}\cup\mathcal{C}_{22}$, $\mathcal{C}_3$ の3つが両側 cell である。

(ii) $\underline{C_3}$ 表10の番号付けを用いる。

- $\mathcal{C}_1=\{1\}$
- $\mathcal{C}_{21}=\{5, 9, 11, 33, 34\}$, $\mathcal{C}_{22}=\{3, 13, 17, 18, 25\}$, $\mathcal{C}_{23}=\{2, 19, 20, 29\}$
- $\mathcal{C}_{31}=\{26, 43, 44\}$, $\mathcal{C}_{32}=\{10, 35, 36\}$, $\mathcal{C}_{33}=\{30, 47, 48\}$
- $\mathcal{C}_{41}=\{27, 41, 42\}$, $\mathcal{C}_{42}=\{31, 45, 46\}$, $\mathcal{C}_{43}=\{15, 37, 38\}$
- $\mathcal{C}_{51}=\{7, 21, 22, 28\}$, $\mathcal{C}_{52}=\{4, 14, 16, 39, 40\}$, $\mathcal{C}_{53}=\{6, 12, 23, 24, 32\}$
- $\mathcal{C}_6=\{8\}$

の14個が左cell であり，$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_{21}\cup\mathcal{C}_{22}\cup\mathcal{C}_{23}$, $\mathcal{C}_3=\mathcal{C}_{31}\cup\mathcal{C}_{32}\cup\mathcal{C}_{33}$, $\mathcal{C}_4=\mathcal{C}_{41}\cup\mathcal{C}_{42}\cup\mathcal{C}_{43}$, $\mathcal{C}_5=\mathcal{C}_{51}\cup\mathcal{C}_{52}\cup\mathcal{C}_{53}$, $\mathcal{C}_6$ の6個が両側cell である。

$\leq$ の導びく左cell の集合上の順序関係は表5，表7のとおり。

以上の準備のもとで $V(L_w)$ を決定する。

(i) $\underline{C_2}$ $w=e, s, t, stst$ のとき $\overline{X}_w$ は non-singular (実際これらは Wの parabolic 型部分群の最長元である。)。よってこのとき $V(L_w)=\Upsilon^r(w)$ (Prop 1.1, Lemma 2.7)。Cor 1.5 により

$$V(L_w)=\begin{cases}(4)_1 & w\in\mathcal{C}_1\\ (2^2)_1 & w\in\mathcal{C}_{21}\\ (2^2)_2 & w\in\mathcal{C}_{22}\\ (1^4)_1 & w\in\mathcal{C}_3\end{cases}$$

(ii) $\underline{C_3}$ $w=1, 9, 17, 2, 10, 41, 4, 8$ は parabolic 型部分群の最長元なので $V(L_w)=\Upsilon^r(w)$。よって $V(L_w)=(6)_1$ for $w\in\mathcal{C}_1$,

$V(L_w) = (24)_1$ for $w \in C_{21}$, $V(L_w) = (24)_2$ for $w \in C_{22}$, $V(L_w) = (24)_3$ for $w \in C_{23}$, $V(L_w) = (3^2)_2$ for $w \in C_{32}$, $V(L_w) = (2^3)_1$ for $w \in C_{41}$, $V(L_w) = (1^2 2^2)_2$ for $w \in C_{52}$, $V(L_w) = (1^6)_1$ for $w \in C_6$ である。また一般に $V(L_w) \supset Y^r(w)$ なので，$V(L_w) \supset (3^2)_1$ for $w \in C_{31}$, $V(L_w) \supset (3^2)_3$ for $w \in C_{33}$, $V(L_w) \supset (2^3)_2$ for $w \in C_{42}$, $V(L_w) \supset (2^3)_3$ for $w \in C_{43}$, $V(L_w) \supset (1^2 2^2)_1$ for $w \in C_{51}$, $V(L_w) \supset (1^2 2^2)_3$ for $w \in C_{53}$ となる。$w \in C_{31}$ のとき $(3^2)_1$ は $V(L_w)$ の既約成分であり、もし他の既約成分があるとすればそれは $(3^2)_2$ または $(3^2)_3$ である。$C_{22} \gneqq C_{31}$ なので $w \in C_{31}$, $y \in C_{22}$ とすると $V(L_w) \subset V(L_y) = (24)_2$。表 2 より $V(L_w) = (3^2)_3$ for $w \in C_{31}$ がわかる。以下同様の論法をくり返す。C_{42} と C_{32} を比べて $V(L_w) = (2^3)_2$ for $w \in C_{42}$。C_{51} と C_{41} を比べて $V(L_w) = (1^2 2^2)_1$ for $w \in C_{51}$。C_{52} と C_{31}, C_{52} と C_{23} を比べて $V(L_w) = (1^2 2^2)_2$ for $w \in C_{52}$。C_{53} と C_{42} を比べて $V(L_w) = (1^2 2^2)_3$ for $w \in C_{53}$。C_{43} と C_{31}, C_{43} と C_{51} を比べて $V(L_w) = (2^3)_3 \cup (2^3)_1$。$C_{33}$ と C_{23} を比べて $V(L_w) = (3^2)_3$ または $V(L_w) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$ for $w \in C_{33}$。$w = 30 \in C_{33}$ とする。$V(L_w) = (3^2)_3 \cup (3^2)_2$ と仮定すると，ある $y \in \Xi(w)$ に対して $Y^r(y) = (3^2)_2$ とならねばならない。$y \in W$ で $y \leqq w$ かつ $Y^r(y) = (3^2)_2$ となるのは $y = 10$ だけである。ところが具体的計算により X_y は $\overline{X_w}$ 中で non-singular である事がわかる

$(y=10,\ w=30)$。よって $y=10 \notin \Xi(w)$。従って $V(L_w)=(3^2)_3$ for $w\in C_{33}$ 以上で全ての $w\in W$ に対して $V(L_w)$ が決定された。(表 10)

$\boxed{3.3}$ $V(L_w)$ for B_3

$K=\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}\in M_7(\mathbb{C})$ の時 $\mathfrak{g}=\{x\in M_7(\mathbb{C}) \mid {}^t xK+Kx=0\}$ は B_3 型の単純Lie環で $\mathfrak{b}=\{\mathfrak{g}$ に含まれる上三角行列$\}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環，また

$$\mathfrak{n}^+=\left\{\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & a & b & g & e & d & 0 \\ 0 & 0 & c & h & f & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & -f & -e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -h & -g \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \;\middle|\; a,\cdots,k\in\mathbb{C}\right\}$$

である。Weyl群 W は C_3 型の Weyl 群と同じで，左 cell 両側 cell も C_3 型のときと同じである。巾零共役類の集合 Nilp は，7の分割であって even part の数が偶数であるもの全体と同一視される。すなわち Nilp$=\{(7),(1^25),(13^2),(2^23),(1^43),(1^32^2),(1^7)\}$。軌道的多様体は次のとおり。

- $(7)_1=\mathfrak{n}^+$
- $(1^25)_1=\{a=0\}$, $(1^25)_2=\{c=0\}$, $(1^25)_3=\{k=0\}$
- $(13^2)_1=\{a=k=0\}$, $(13^2)_2=\{c=0,\ ah+bk=0\}$, $(13^2)_3=\{k=0,\ h^2+2cf=0\}$
- $(2^23)_1=\{a=k=0,\ (bf-ce)^2+2(fg-eh)(bh-cg)=0\}$

$$(2^2 3)_2 = \left\{ \begin{matrix} c=0 \quad , & 2k^2 d + 2fkg - 2ehk - af^2 = 0 \\ ah + bk = 0 & 2hfg + 2hkd - 2eh^2 + bf^2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$(2^2 3)_3 = \{ a=b=c=0 \}$$

- $(1^4 3)_1 = \{ a=k=0,\ bh-gc = bf-ec = gf-eh = 0 \}$

$(1^4 3)_2 = \{ c=k=h=f=0 \}$

$(1^4 3)_3 = \{ a=b=c=0,\ eh-dk-gf=0 \}$

- $(1^3 2^2)_1 = \left\{ \begin{matrix} a=k=0,\ bh-gc = bf-ec = gf-eh = 0 \\ hg+2bf = g^2+2be = h^2+2cf = 0 \end{matrix} \right\}$

$(1^3 2^2)_2 = \{ c=k=h=f=0,\ g^2+2ad+2be=0 \}$ • $(1^7)_1 = \{0\}$

以下C_3型のときと同様にして$V(L_w)$が計算される(表 10)。

$\boxed{3.4}$ $V(L_w)$ for G_2

$\mathfrak{g}$をG_2型の単純Lie環とする。巾零共役類に対応するweighted Dynkin diagramが $\overset{a}{\circ}\!\Rrightarrow\!\overset{b}{\circ}$ $(a,b=0 \text{ or } 1 \text{ or } 2)$のとき、この巾零共役類を$(a\ b)$で表わす。このとき$\mathrm{Nilp} = \{(2\,2), (2\,0), (0\,1), (1\,0), (0\,0)\}$である。Cartan部分環$\mathfrak{h}$をとり$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$のroot系を$\Delta$とする。正root系$\Delta^+$をひとつとり、単純rootを$\alpha, \beta$とする(ここで$\alpha$はlong root, βはshort root)。$\gamma \in \Delta^+$に対応するroot空間を$\mathfrak{g}_\gamma$, $\mathfrak{g}_\gamma$に対応するGの部分群をU_γとする。また$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\gamma$に対応する$G$の部分群を$U$とする。このとき軌道的多様体は次のとおり。

- $(22)_1 = \mathfrak{n}^+$
- $(20)_1 = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+ - \{\beta\}} \mathfrak{g}_\gamma$, $(20)_2 = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+ - \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$
- $(01)_1 = (\mathrm{Ad}(\dot{v}_\beta)(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\alpha+\beta})) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$, $(01)_2 = \mathrm{Ad}(\dot{v})\mathfrak{g}_\beta$
- $(10)_1 = (\mathrm{Ad}(\dot{v}_\beta)\mathfrak{g}_\alpha) + \mathfrak{g}_{2\alpha+3\beta}$
- $(00)_1 = \{0\}$

αに関する鏡影をs, βに関する鏡影をtとすると，右cellは $\mathcal{C}_1=\{e\}$, $\mathcal{C}_{21}=\{t, ts, tst, tsts, tstst\}$ $\mathcal{C}_{22}=\{s, st, sts, stst, ststs\}$, $\mathcal{C}_3=\{ststst\}$ の4個，両側cellは $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_{21}\cup\mathcal{C}_{22}$, $\mathcal{C}_3$ の3個である。

C_2のときと全く同様にして$V(L_w)$が計算される（表9）。

$\boxed{3.5}$ $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(L_w)$

ここではG_2型のときの計算のみを述べて，C_2, B_3, C_3のときは省略する。結果は表8，10にまとめる。以下$\mathfrak{g}$はG_2型とする。

$\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}(L_w) = \sum_{y\in W} m(y,w)[\overline{T^*_{X_w}X}]$とするとき$a(w)=\sum_{y\in W} m(y,w)b(y)$であった。また$a(w)=\sum_{y\leq w}(-1)^{\ell(w)+\ell(y)}y$である。$w=e, s, t, ststst$はparabolic型部分群の最長元なので，$\overline{X_w}$はnon-singularである。また$\overline{X_{sts}}$もnon-singularである事がわかる（筆者は自分で計算したが知られている筈の事である。）。よってLemma 1.1により$a(w)=b(w)$ for $w=e, s, t, sts, ststst$となる。さらに

Lemma 1.1 と Lemma 1.2 により $a(st)=b(st)$, $a(ts)=b(ts)$ である。Lemma 1.2, 2.7 により

$$a(tst)= b(tst) + x_1 b(t) \qquad x_1>0$$

$$a(stst)= b(stst) + x_2 b(st) \qquad x_2>0$$

$$a(tsts)= b(tsts) + x_2 b(ts)$$

$$a(ststs)= b(ststs) + x_3 b(sts) + x_4 b(s) \qquad \left(\begin{array}{l} x_3\geqq 0, x_4 \geqq 0 \\ x_3>0 \text{ or } x_4>0 \end{array}\right.$$

$$a(tstst)= b(tstst) + x_5 b(tst) + x_6 b(t) \qquad x_5\geqq 0, x_6>0$$

がわかる。Lemma 2.8 と Lemma 2.10 により, $u=s$ or t, $w\in W$ $uw>w$ なら

$$u\,b(w) \in b(w) + b(uw) + \sum_{\substack{uy<y<uw \\ Y^{\ell}(y)\subset Y^{\ell}(w)}} \mathbb{Z}_{\geqq 0}\, b(y)$$

となる。よって 表4 により $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=1$, $x_6=1$ がわかる。

$\boxed{3.6}$ 表

表1.1 including relation of orbital varieties for C_2

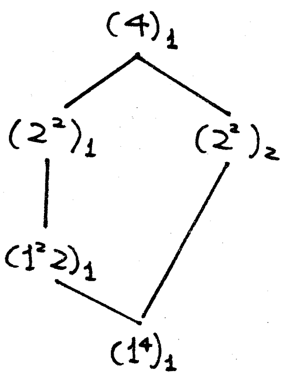

表1.2 including relation of obital varieties associated to special nilpotent orbits for C_2

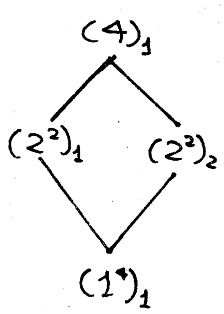

表2.1 including relation of orbital varieties for C_3

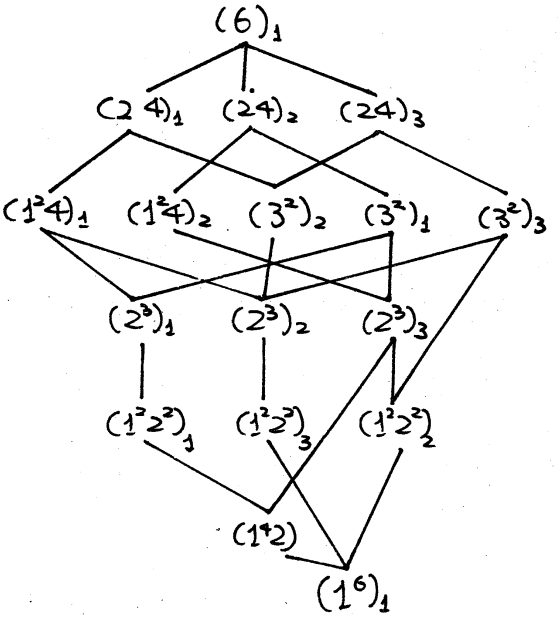

表2.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for C_3

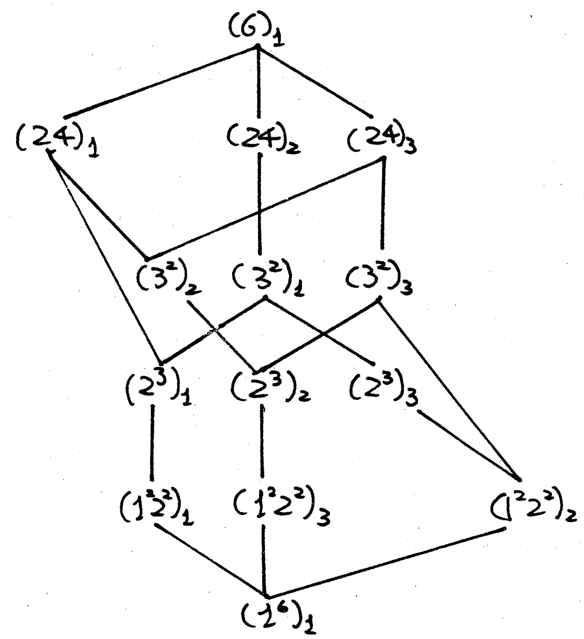

表3.1 including relation of orbital varieties for B_3

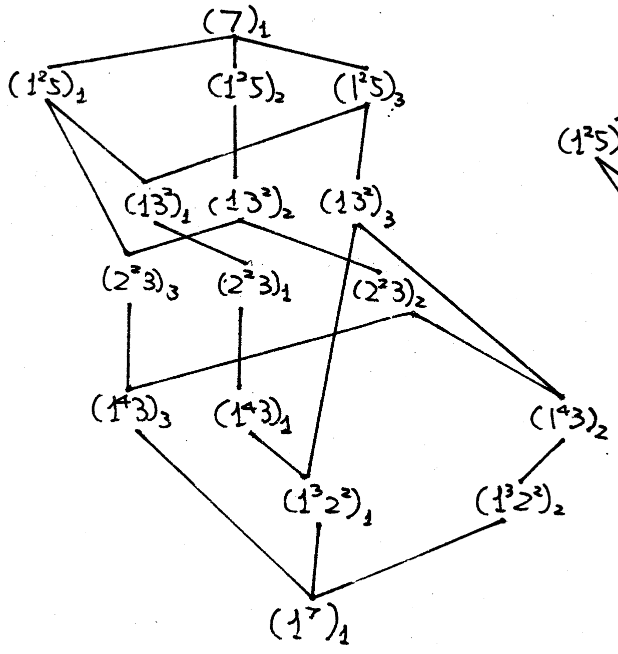

表3.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for B_3

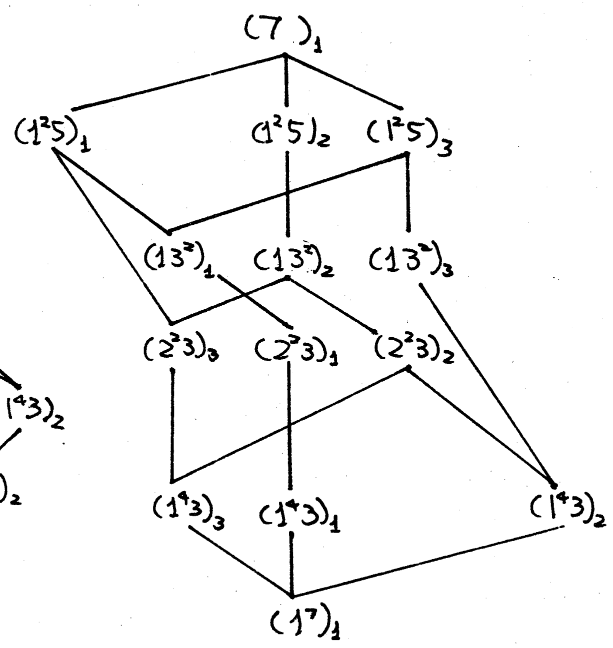

表 4.1 including relation of orbital varieties for G_2

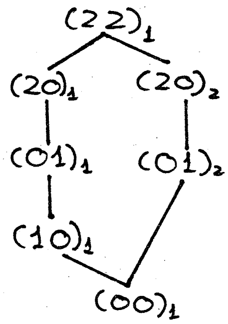

表 4.2 including relation of orbital varieties associated to special nilpotent orbits for G_2

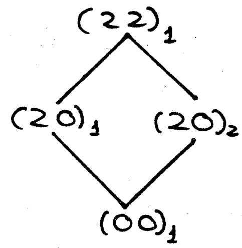

表 5 order relation of right cells for C_2

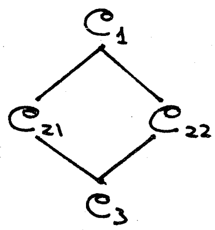

表 6 order relation of right cells for G_2

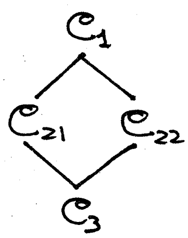

表 7 order relation of right cells for B_3 C_3

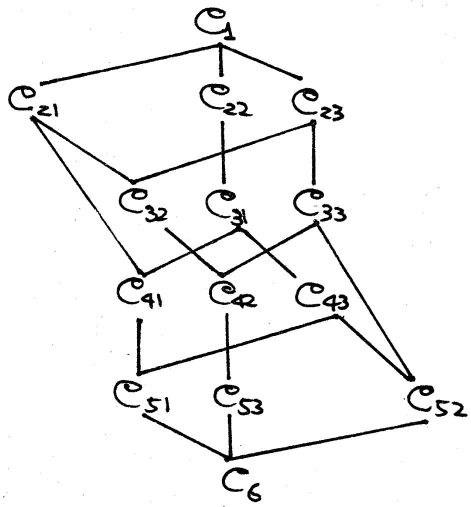

表8. C_2

w	$Y^{\ell}(w)$	$Y^{r}(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(4)_1$	$(4)_1$	C_1	$(4)_1$	$b(e)$
s	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(s)$
t	$(2^2)_1$	$(2^2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(t)$
st	$(2^2)_1$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(st)$
ts	$(2^2)_2$	$(2^2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(ts)$
sts	$(2^2)_2$	$(2^2)_2$	C_{22}	$(2^2)_2$	$b(sts)$
tst	$(1^2 2)_1$	$(1^2 2)_1$	C_{21}	$(2^2)_1$	$b(tst) + b(t)$
$stst$	$(1^4)_1$	$(1^4)_1$	C_3	(1^4)	$b(stst)$

表9. G_2

w	$Y^{\ell}(w)$	$Y^{r}(w)$	right cell	$V(L_w)$	$a(w)$
e	$(22)_1$	$(22)_1$	C_1	$(22)_1$	$b(e)$
s	$(20)_2$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(s)$
t	$(20)_1$	$(20)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(t)$
st	$(20)_1$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(st)$
ts	$(20)_2$	$(20)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(ts)$
sts	$(20)_2$	$(20)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(sts)$
tst	$(01)_1$	$(01)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tst) + 2b(t)$
$stst$	$(01)_1$	$(01)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(stst) + b(st)$
$tsts$	$(01)_2$	$(01)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tsts) + b(ts)$
$ststs$	$(01)_2$	$(01)_2$	C_{22}	$(20)_2$	$b(ststs) + b(s)$
$tstst$	$(10)_1$	$(10)_1$	C_{21}	$(20)_1$	$b(tstst) + b(tst) + b(t)$
$ststst$	$(00)_1$	$(00)_1$	C_3	$(00)_1$	$b(ststst)$

表10. C_3, B_3

No	w	reduced expression	w^{-1}	right cell	C_3: $Y^l(w)$	C_3: $Y^r(w)$	C_3: $V(L_w)$	C_3: $a(w)$	B_3: $Y^l(w)$	B_3: $Y^r(w)$	B_3: $V(L_w)$	B_3: $a(w)$
1	(1 2 3)		1	e_1	$(6)_1$	$(6)_1$	$(6)_1$	$b(1)$	$(7)_1$	$(7)_1$	$(7)_1$	$b(1)$
2	(−1 2 3)	1	2	e_{23}	$(24)_3$	$(24)_3$	$(24)_3$	$b(2)$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	$b(2)$
3	(1 −2 3)	212	3	e_{22}	$(1^2 4)_2$	$(1^2 4)_2$	$(24)_2$	$b(3)+b(17)$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$b(3)$
4	(−1 −2 3)	2121	4	e_{52}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$b(4)$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	$b(4)$
5	(1 2 −3)	32123	5	e_{21}	$(1^2 4)_1$	$(1^2 4)_1$	$(24)_1$	$b(5)+b(9)+b(41)$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$b(5)$
6	(−1 2 −3)	321213	6	e_{53}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$b(6)$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	$b(6)$
7	(1 −2 −3)	32123212	7	e_{51}	$(1^4 2)_1$	$(1^4 2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$b(7)+b(21)$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$b(7)$
8	(−1 −2 −3)	132123212	8	e_6	$(1^6)_1$	$(1^6)_1$	$(1^6)_1$	$b(8)$	$(1^7)_1$	$(1^7)_1$	$(1^7)_1$	$b(8)$
9	(1 3 2)	3	9	e_{21}	$(24)_1$	$(24)_1$	$(24)_1$	$b(9)$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$b(9)$
10	(−1 3 2)	13	10	e_{32}	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$b(10)$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$b(10)$
11	(1 −3 2)	3212	13	e_{21}	$(1^2 4)_2$	$(1^2 4)_1$	$(24)_1$	$b(11)+b(33)$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$b(11)$
12	(−1 −3 2)	32121	14	e_{53}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$b(12)$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	$b(12)$
13	(1 3 −2)	2123	11	e_{22}	$(1^2 4)_1$	$(1^2 4)_2$	$(24)_2$	$b(13)+b(25)$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$b(13)$
14	(−1 3 −2)	21213	12	e_{52}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$b(14)$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	$b(14)$
15	(1 −3 −2)	2123212	15	e_{43}	$(2^3)_3$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3 \cup (2^3)_1$	$b(15)+b(27)+b(37)+b(41)$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	$b(15)$
16	(−1 −3 −2)	21232121	16	e_{52}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$b(16)$	$(1^3 2^2)_2$	$(1^3 2^2)_2$	$(1^4 3)_2$	$b(16)+b(4)$
17	(2 1 3)	2	17	e_{22}	$(24)_2$	$(24)_2$	$(24)_2$	$b(17)$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$b(17)$
18	(−2 1 3)	21	19	e_{22}	$(24)_3$	$(24)_2$	$(24)_2$	$b(18)$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$b(18)$
19	(2 −1 3)	12	18	e_{23}	$(24)_2$	$(24)_3$	$(24)_3$	$b(19)$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	$b(19)$
20	(−2 −1 3)	121	20	e_{23}	$(24)_3$	$(24)_3$	$(24)_3$	$b(20)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3$	$(1^2 5)_3$	$b(20)+b(2)$
21	(2 1 −3)	321323	21	e_{51}	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$b(21)$	$(13^2)_3$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$b(21)$
22	(−2 1 −3)	3212321	23	e_{51}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$b(22)$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$b(22)$
23	(2 −1 −3)	3212132	22	e_{53}	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$b(23)$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_1$	$(1^4 3)_1$	$b(23)$
24	(−2 −1 −3)	32123121	24	e_{53}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$b(24)$	$(1^3 2^2)_1$	$(1^3 2^2)_1$	$(1^4 3)_1$	$b(24)+b(6)$

表 10. continued

No	w	reduced expression	w^{-1}	right cell	C_3: $\Upsilon^0(w)$	C_3: $\Upsilon^1(w)$	C_3: $V(L_w)$	C_3: $a(w)$	B_3: $\Upsilon^0(w)$	B_3: $\Upsilon^1(w)$	B_3: $V(L_w)$	B_3: $a(w)$
25	$(2\ 3\ 1)$	23	33	e_{22}	$(24)_1$	$(24)_2$	$(24)_2$	$b(25)$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_2$	$b(25)$
26	$(-2\ 3\ 1)$	213	35	e_{31}	$(3^2)_2$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(26)$	$(13^2)_1$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(26)$
27	$(2\ -3\ 1)$	23212	37	e_{41}	$(2^3)_3$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(27)+b(41)$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_3$	$b(27)$
28	$(-2\ -3\ 1)$	232121	39	e_{51}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_1$	$b(28)$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_3$	$b(28)$
29	$(2\ 3\ -1)$	123	34	e_{23}	$(24)_1$	$(24)_3$	$(24)_3$	$b(29)$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_3$	$b(29)$
30	$(-2\ 3\ -1)$	1213	36	e_{33}	$(3^2)_2$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(30)$	$(13^2)_1$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3 \cup (13^2)_1$	$b(30)+b(10)$
31	$(2\ -3\ -1)$	123212	38	e_{42}	$(2^3)_3$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(31)+b(45)$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_1$	$b(31)$
32	$(-2\ -3\ -1)$	1232121	40	e_{53}	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_3$	$b(32)$	$(1^3 2^2)_2$	$(1^3 2^2)_1$	$(1^4 3)_1$	$b(32)+b(12)$
33	$(3\ 1\ 2)$	32	25	e_{21}	$(24)_2$	$(24)_1$	$(24)_1$	$b(33)$	$(1^2 5)_2$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$b(33)$
34	$(-3\ 1\ 2)$	321	29	e_{21}	$(24)_3$	$(24)_1$	$(24)_1$	$b(34)$	$(1^2 5)_3$	$(1^2 5)_1$	$(1^2 5)_1$	$b(34)$
35	$(3\ -1\ 2)$	132	26	e_{32}	$(3^2)_1$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$b(35)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$b(35)$
36	$(-3\ -1\ 2)$	3121	30	e_{32}	$(3^2)_3$	$(3^2)_2$	$(3^2)_2$	$b(36)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_1$	$(13^2)_1$	$b(36)+b(10)$
37	$(3\ 1\ -2)$	21323	27	e_{43}	$(2^3)_1$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3 \cup (2^3)_1$	$b(37)+b(41)$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	$b(37)$
38	$(-3\ 1\ -2)$	212321	31	e_{43}	$(2^3)_2$	$(2^3)_3$	$(2^3)_3 \cup (2^3)_1$	$b(38)+b(42)$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_2$	$(2^2 3)_2$	$b(38)$
39	$(3\ -1\ -2)$	212132	28	e_{52}	$(1^2 2^2)_1$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$b(39)$	$(1^4 3)_3$	$(1^4 3)_2$	$(1^4 3)_2$	$b(39)$
40	$(-3\ -1\ -2)$	2123121	32	e_{52}	$(1^2 2^2)_3$	$(1^2 2^2)_2$	$(1^2 2^2)_2$	$b(40)$	$(1^3 2^2)_1$	$(1^3 2^2)_2$	$(1^4 3)_2$	$b(40)+b(14)$
41	$(3\ 2\ 1)$	323	41	e_{41}	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(41)$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_3$	$b(41)$
42	$(-3\ 2\ 1)$	2321	45	e_{41}	$(2^3)_2$	$(2^3)_1$	$(2^3)_1$	$b(42)$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_3$	$b(42)$
43	$(3\ -2\ 1)$	2132	43	e_{31}	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(43)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(43)$
44	$(-3\ -2\ 1)$	23121	47	e_{31}	$(3^2)_3$	$(3^2)_1$	$(3^2)_1$	$b(44)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_2$	$(13^2)_2$	$b(44)+b(26)$
45	$(3\ 2\ -1)$	1323	42	e_{42}	$(2^3)_1$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(45)$	$(2^2 3)_3$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_1$	$b(45)$
46	$(-3\ 2\ -1)$	12321	46	e_{42}	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$(2^3)_2$	$b(46)$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_1$	$(2^2 3)_1$	$b(46)$
47	$(3\ -2\ -1)$	12132	44	e_{33}	$(3^2)_1$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(47)$	$(13^2)_2$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3 \cup (13^2)_1$	$b(47)+b(35)$
48	$(-3\ -2\ -1)$	123121	48	e_{33}	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$(3^2)_3$	$b(48)$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3$	$(13^2)_3 \cup (13^2)_1$	$b(48)+b(4)+b(36)+b(30)+b(10)+b(20)$

§4. 予想

$\boxed{4.1}$ Borho-Brylinski [BoB 2] は, primitive quotient の特性多様体 $Ch(U(\mathfrak{g})/I_w)$ が常に既約であると予想した。Prop 1.4 により，これは $V(L_w)$ が常に既約である事と同値である ([J3; 8.15] 参照)。　特殊表現 $Sp(O_w^{LR}) = \sigma(w)$ は2種類の基底 $\{g_Y \mid Y \in Irr(\overline{O_w^{LR} \cap \mathfrak{n}^+})\}$, $\{P_y \mid y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{L}{\sim}\}$ を持つ (但し P_y は定数倍を除いて決まる。) が，上の Borho-Brylinski 予想は，この2つの基底が(定数倍を除いて)一致する事とも同値である (Prop. 2.3, 2.4)。 しかし§3からわかるようにこれには反例がある。そこで一つの修正案として次の予想を提出する。

「Conjecture 4.1　$O \in Nilp_{sp}$, $\mathcal{C} \leftrightarrow O$ に対応する $\underset{LR}{\sim}$ の同値類とする ($W/\underset{LR}{\sim} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} Nilp_{sp}$, §2.3)。 このとき $\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}$ と $Irr(\overline{O \cap \mathfrak{n}^+})$ の間の一対一対応 ($w \longmapsto Y_w$) 及び, $Irr(\overline{O \cap \mathfrak{n}^+})$ 上の順序関係 $\succ$ が存在して，

$$V(L_w) = Y_w \cup \tilde{Y}_w \quad (\forall w \in \mathcal{C})。$$

ここで $\tilde{Y}_w$ は $Y \prec \tilde{Y}_w$ となる $Y \in Irr(\overline{O \cap \mathfrak{n}^+})$ の幾つかの合併集合である。」

この予想は A_n 型では証明されている ([BoB 2; §6.10])。

Conjecture 4.1 は特殊表現 $Sp(O)$ の2種類の基底の変換行列が上三角形になる事と同値である。また Conjecture 4.1

から Conjecture 0.5 が従う事も明らか。

$\boxed{4.2}$ $\hat{W} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Nilp}_{sp}$，$\hat{W} \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Nilp}$ を次の様に定義する。$\tau \in \hat{W}$ に対して $\tau \otimes \tau \subset V_w^{LR}$ なら $\Phi(\tau) = \mathcal{O}_w^{LR}$，$\tau \otimes \tau \in V_w^{\ell r}$ なら $\Psi(\tau) = \mathcal{O}_w^{\ell r}$。ここで $\overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} \subset \overline{\mathcal{O}_w^{LR}}$ に注意しておく。実際，$\overline{\mathcal{O}_w^{LR}} = \overline{G \cdot V(L_w)} \supset \overline{G \cdot Y^r(w)} = \overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}}$。

Prop. 4.2 $\mathcal{O} \in \mathrm{Nilp}_{sp}$ とする。次の条件が成立すれば，Conjecture 4.1 は正しい。

(4.3) $\{\tau \in \hat{W} \mid \Phi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}\} = \{\tau \in \hat{W} \mid \Psi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}\}$

(証明) $W \times W$-加群として $\sum_{\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}a(w) \cong \bigoplus_{\Phi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}} (\tau \otimes \tau)$，$\sum_{\mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}b(w) \cong \bigoplus_{\Psi(\tau) \subset \overline{\mathcal{O}}} (\tau \otimes \tau)$ であった。よって仮定により $\sum_{\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}a(w) = \sum_{\mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}} \mathbb{C}b(w)$。

$a(w) \in b(w) + \sum_{y < w} \mathbb{Z}_{\geq 0} b(y)$ なので $\mathcal{O}_w^{LR} \subset \overline{\mathcal{O}} \Leftrightarrow \mathcal{O}_w^{\ell r} \subset \overline{\mathcal{O}}$ がわかる。一般に $\overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} \subset \overline{\mathcal{O}_w^{LR}}$ なので

(4.4) $\mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O}$ ならば $\mathcal{O}_w^{LR} = \mathcal{O}$，特に $Y^r(w) \in \mathrm{Irr}(V(L_w))$。

さて $\mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{n}^+)$ の部分集合の増大列

$$\phi = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset \mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}} \cap \mathfrak{n}^+)$$

を次のように帰納的に定義する。J_{r-1} まで定義されたとき，

$$J_r = \{Y^r(w) \mid \mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O},\ V(L_w) \subset Y^r(w) \cup (\bigcup_{Y \in J_{r-1}} Y)\}。$$

そこで次を示す。

(4.5) $J_{r-1} \subsetneq J$ なら $J_{r-1} \subsetneq J_r$

$\mathcal{S} = \{w \in W \mid \mathcal{O}_w^{\ell r} = \mathcal{O},\ Y^r(w) \notin J_{r-1}\}$ は仮定により空集合

ではない。Bruhat order に関する $\mathcal{S}$ の極小元 w をひとつとる。このとき $Y^r(w)\in J_r$ となる事を示せばよい。Lemma 2.7 と (4.4) により

$$V(L_w)=Y^r(w)\cup\Big(\bigcup_{\substack{y\in Z(w)-\{w\}\\ \mathcal{O}_y^{gr}=\mathcal{O}}} Y^r(y)\Big)$$

となる。いま

$$V(L_w)\not\subset Y^r(w)\cup\Big(\bigcup_{Y\in J_{r-1}} Y\Big)$$

と仮定すると，ある $y<w$ が存在して $\mathcal{O}_y^{gr}=\mathcal{O}$ かつ $Y^r(y)\notin J_{r-1}$ すなわち $y\in\mathcal{S}$。これは w の極小性に反する。よって

$$V(L_w)\subset Y^r(w)\cup\Big(\bigcup_{Y\in J_{r-1}} Y\Big)。$$

これで (4.5) が示された。

$\mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+})$ 上の順序関係 $>$ を $Y\in J_r-J_{r-1}$, $Y'\in J_s-J_{s-1}$, $r>s$ ならば $Y>Y'$ となるように定める。また各 $Y\in\mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+})$ に対して $w_Y\in\mathcal{C}$ を次を満たすようにとる。$Y\in J_r-J_{r-1}$ のとき $Y^r(w_Y)=Y$, $V(L_{w_Y})\subset Y\cup\Big(\bigcup_{Y'\in J_{r-1}} Y'\Big)$。このとき $\{w_Y\mid Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)\}$ は $\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}$ の完全代表系である。実際 $Y\neq Y'$ ならば $V(L_{w_Y})\neq V(L_{w_{Y'}})$，よって $w_Y\underset{R}{\not\sim} w_{Y'}$ (Cor. 1.5)。また $\#|\mathcal{C}/\underset{R}{\sim}|=\dim Sp(\mathcal{O})=\#|\mathrm{Irr}(\mathcal{O}\cap\mathfrak{n}^+)|$ (§2)。そこで w_Y を含む $\underset{R}{\sim}$ の同値類に Y を対応させる事により Conjecture 4.1 の成立する事がわかる。■

$\mathcal{O}\in\mathrm{Nilp}_{sp}$ のとき $\{\tau\in\hat{W}\mid\Phi(\tau)\subset\overline{\mathcal{O}}\}\subset\{\tau\in\hat{W}\mid\Psi(\tau)\subset\overline{\mathcal{O}}\}$ は一般に成立する ([KT]) が，逆の包含関係は一般には成立し

ない。

写像Φ, Ψは全ての場合について具体的にわかっており([BV1,2], [Sh1,2], [ALS]), 巾零共役類の閉包の包含関係も知られている(古典型はよく知られている。例外型は[Sh3], [M]) ので(4.3)が成立するかどうかはcheckできる。例えばE_6では全ての特殊巾零共役類Oについて(4.3)が成立するのでConjecture 4.1は正しい。F_4型では11個の特殊巾零共役類のうち9個については(4.3)が成立しているが, 残りの2個では成立していない。

Appendix

$\boxed{A.1}$ moment map $T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ の像は$\mathfrak{g}$の巾零元全体$\mathcal{N}$と一致し, $T^*X \xrightarrow{\gamma} \mathcal{N}$は$\mathcal{N}$の特異点解消を与える(Springer)。導来圏での対象$R\gamma_!(\mathbb{C}_{T^*X})$はWeyl群の作用を持つ(Lusztig [L], [BM]も参照)。よって$\mathcal{N}$の局所閉部分代数多様体Dに対して$H_c^*(\gamma^{-1}(D), \mathbb{C}) = \mathbb{H}_c^*(D, R\gamma_!(\mathbb{C}_{T^*X})|D)$あるいはその双対空間$H_*(\gamma^{-1}(D))$はW-加群になる。特に$x \in \mathcal{N}$のとき$\gamma^{-1}(x) \cong X_x$なので$H_{2d_0}(X_x)$はW-加群になる。また$T^*(X \times X) = T^*X \times T^*X \xrightarrow{\gamma \times \gamma} \mathcal{N} \times \mathcal{N}$において$Z = (\gamma \times \gamma)^{-1}(\mathcal{N}^a)$(ここで$\mathcal{N}^a = \{(x, -x) \mid x \in \mathcal{N}\}$)なので$H_{4d}(Z)$は$W \times W$-加群になる。ここで与えたW (resp. $W \times W$)の$H_{2d_0}(X_x)$

(resp. $H_{4d}(Z)$)への作用は[KL2]のものと一致する([H])。

$\boxed{A.2}$ Lemma 2.9, 2.10 の証明を簡単に述べる。$\mathcal{N}^a$を$\mathcal{N}$と同一視して $Z \xrightarrow{\rho} \mathcal{N}$ が得られる。$\mathbb{O}\in \mathrm{Nilp}$ に対して $\rho^{-1}(\overline{\mathbb{O}}) = \bigcup_{\mathbb{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathbb{O}}} Z_w$ はZ中で閉なので、次の$W\times W$-加群としての完全列を得る。

$$0 \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathbb{O}})) \longrightarrow H_{4d}(Z) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\mathcal{N}-\overline{\mathbb{O}})) \longrightarrow 0$$

よって $\bigoplus_{\mathbb{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathbb{O}}} \mathbb{C}b(w)$ $\left(\cong \bigoplus_{\mathbb{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathbb{O}}} \mathbb{C}[Z_w] = H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathbb{O}}))\right)$ は$\mathbb{C}[W]$ $(\cong H_{4d}(Z))$ の$W\times W$-部分加群である。次に$\partial\overline{\mathbb{O}}=\overline{\mathbb{O}}-\mathbb{O}$ とおくとき上と同様にして

$$0 \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\partial\overline{\mathbb{O}})) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\overline{\mathbb{O}})) \longrightarrow H_{4d}(\rho^{-1}(\mathbb{O})) \longrightarrow 0$$

がやはり$W\times W$-加群としての完全列。従って$W\times W$-加群として

$$\Big(\bigoplus_{\mathbb{O}_w^{gr}\subset\overline{\mathbb{O}}} \mathbb{C}b(w)\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{\mathbb{O}_w^{gr}\subset\partial\overline{\mathbb{O}}} \mathbb{C}b(w)\Big) \cong H_{4d}(\rho^{-1}(\mathbb{O}))$$

がわかる。$x\in\mathbb{O}$のとき$\rho^{-1}(\mathbb{O})$を$\mathbb{O}\cong G/Z_G(x)$上のfiber束とみると$\rho^{-1}(\mathbb{O})\cong G\times^{Z_G(x)}(X_x\times X_x)$。これから$H_{4d}(\rho^{-1}(\mathbb{O}))\cong \left(H_{2d_0}(X_x)\otimes H_{2d_0}(X_x)\right)^{A(x)}$がわかる。よってLemma 2.9が示された。

次に
$$\begin{tikzcd} T^*X\times T^*X \arrow[r, "\gamma\times 1"] & \mathcal{N}\times T^*X \arrow[r, "1\times\gamma"] & \mathcal{N}\times\mathcal{N} \\ Z \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & (\gamma\times 1)(Z) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathcal{N}^a\cong\mathcal{N} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

において $Z=f^{-1}((\gamma\times 1)(Z))$ である。よって $\mathbb{R}f_!(\mathbb{C}_Z)$ にWの作用が定まり、$H_{4d}(Z)=\left(\mathbb{H}_c^{4d}((\gamma\times 1)(Z);\mathbb{R}f_!(\mathbb{C}_Z))\right)^*$ はW-加群

になる。これは §A.1 で定義された $W\times W$ の $H_{ad}(Z)$ への作用における $W\times 1$ の作用と一致する。$(\gamma\times 1)(Z)$ を $T^*X \cong G\times^B \mathfrak{n}^+$ と同一視するとき $\mathfrak{f}(Z_w) = G\times^B Y^\ell(w)$ なので、I と同様にして Lemma 2.10 が示される。

$\boxed{A.3}$ Lemma 2.11 を示す。まず (i) を示す。Y を $O\in$ Nilp に対随した軌道的多様体とする。∂Y を Y に真に含まれる軌道的多様体全ての合併集合として、$\mathring{Y} = Y - \partial Y = Y\cap O$ とおく。§A.2 により $\bigoplus_{Y^\ell(w)\subset Y} \mathbb{C}b(w)$, $\bigoplus_{Y^\ell(w)\subset \partial Y} \mathbb{C}b(w)$ は $W\times 1$ 不変なので、$M = \left(\bigoplus_{Y^\ell(w)\subset Y} \mathbb{C}b(w)\right) \Big/ \left(\bigoplus_{Y^\ell(w)\subset\partial Y} \mathbb{C}b(w)\right)$ は W-加群になる。$Y^\ell(w) = Y$ となる $w\in W$ に対して、$b(w)$ の M での像を $\bar{b}(w)$ と書くとき、$M = \bigoplus_{Y^\ell(w)=Y} \mathbb{C}\bar{b}(w)$ である。M の W-不変部分加群であって $\{\bar{b}(w) \mid Y^\ell(w) = Y\}$ の部分集合で張られるものは (0) と M に限る事を言えばよい。$Z_{\mathring{Y}} = \mathfrak{f}^{-1}(G\times^B \mathring{Y})$ とおく ($(\gamma\times 1)(Z) \cong T^*X \cong G\times^B \mathfrak{n}^+$)。このとき §A.2 と同様の議論により $M \cong H_{ad}(Z_{\mathring{Y}})$ である。$Z_{\mathring{Y}} \cong \{(x, g_1B, g_2B)\in O\times X\times X \mid x\in g_2\mathring{Y}\cap g_1\mathfrak{n}^+\}$ なので、$x\in\mathring{Y}$ について $Z_{\mathring{Y}}$ を $O = G/Z_G(x)$ 上の fiber 束と思うとき、$Z_{\mathring{Y}} \cong G\times^{Z_G(x)} (X_x\times\hat{X}_x)$。ここで $\hat{X}_x = \bigcup_{\substack{C\in \mathrm{Irr}(X_x)\\ R(C)=Y}} C$ ((2.1) 参照)。
従って W-加群として

$$M \cong \left(H_{ad_0}(X_x)\otimes H_{ad_0}(\hat{X}_x)\right)^{A(x)}.$$

ここで W の $H_{ad_0}(X_x)$ への作用は §A.1 で与えられたもの、

$H_{2d_0}(\widehat{X_x})$ への作用は identity である。$\mathrm{Irr}(\widehat{X_x}) = \pi^{-1}(Y)$ には $A(x)$ が推移的に作用しているので，$C_0 \in \mathrm{Irr}(\widehat{X_x})$ をひとつ固定して $A(x, C_0) = \{z \in A(x) \mid z\cdot C_0 = C_0\}$ とおくとき，

(A.1) $M \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C_0)}$

となる。$\mathrm{Irr}(X_x)$ の $A(x,C_0)$-軌道分解を $\mathrm{Irr}(X_x) = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_k$ とすると，$\{\sum_{C\in I_j}[C] \mid j=1,\dots,k\}$ は $H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C_0)}$ の基底になり、しかも同型 (A.1) でこれは M の基底 $\{b(w)\mid Y^{\ell}(w)=Y\}$ に対応している。また $H_{2d_0}(X_x)=\bigoplus_{\xi\in\mathcal{S}_0}(T_{(0,\xi)}\otimes \xi)$，$H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = T_{(0,1)}\otimes 1 = T_{(0,1)}$ なので射影 $H_{2d_0}(X_x)\xrightarrow{p} H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ が定まる。いま N が $H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C_0)}$ の non-zero な W-部分加群であって，$\{\sum_{C\in I_j}[C] \mid j=1,\dots,k\}$ の部分集合で張られるものとする。$H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$ は既約でまた $p(\sum_{C\in I_j}[C]) = \frac{1}{\#|A(x)|}\sum_{C\in I_j}\sum_{z\in A(x)}[z\cdot C] \neq 0$。よって $p(N) = H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$。よって $N\supset H_{2d_0}(X_x)^{A(x)}$。$\mathrm{Irr}(X_x)$ の $A(x)$-軌道分解を $\mathrm{Irr}(X_x)=J_1\sqcup\cdots\sqcup J_\ell$ (各 J_r は幾つかの I_j の合併集合) とするとき $H_{2d_0}(X_x)^{A(x)} = \bigoplus_{r=1}^{\ell}\mathbb{C}(\sum_{C\in J_r}[C])$。よって N のとり方から $N = H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C_0)}$。(i) が示された。

(ii) は (i) と同値である。(iii) を示す。$O_w^{\ell r} = O_y^{\ell r}$ とする。$\{z\in W \mid O_z^{\ell r} = O\} \longrightarrow \mathrm{Irr}(\overline{O\cap \mathfrak{n}^+})\times\mathrm{Irr}(\overline{O\cap\mathfrak{n}^+})$ $(z\mapsto (Y^{\ell}(z), Y^{r}(z)))$ は全射なので ([St7])，ある $z\in W$ に対して $Y^{\ell}(z)=Y^{\ell}(w)$，$Y^{r}(z) = Y^{r}(w)$。よって (i)(ii) により $w \underset{\ell}{\sim} z \underset{r}{\sim} y$ 特に $w \underset{\ell r}{\sim} y$。Lemma 2.11 か

示された。

「**Corollary A.2** $w \in W$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w^{\ell r}$, $Y = Y^\ell(w)$, $x \in \mathcal{O}$

$C \in R^{-1}(Y)$ ($\mathrm{Irr}(X_x) \xrightarrow{R} \mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+})$ (2,1) 参照) とする。

$A(x, C) = \{ z \in A(x) \mid z \cdot C = C \}$ とおくとき,

$$\nabla_w^\ell \cong H_{2d_0}(X_x)^{A(x,C)}\text{。」}$$

「**Conjecture A.3**

(i) $w \underset{\ell}{\geqq} y \Longleftrightarrow Y^\ell(w) \supset Y^\ell(y)$

(ii) $w \underset{r}{\geqq} y \Longleftrightarrow Y^r(w) \supset Y^r(y)$

(iii) $w \underset{\ell r}{\geqq} y \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{O}_w^{\ell r}} \supset \overline{\mathcal{O}_y^{\ell r}}$ 」

追記　本文を書いた後で次の事がわかったので，ここに記す。Borho-Brylinski 予想は次の (A) と同値であった (§4.1)。

「(A) 特殊表現 $Sp(\mathcal{O}_w^{LR}) = \sigma(w)$ の2種類の基底 $\{ \delta_Y \mid Y \in \mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+}) \}$ $\{ P_{y^{-1}} \mid y \in \mathcal{C}_w^{LR}/\underset{R}{\sim} \}$ は定数倍を除いて一致する。」

一方 Kazhdan-Lusztig は，1979 年頃，次の仮説 (B) の反例を B_3, C_3 で発見した (未発表)。

「(B) 特殊表現の基底 $\{ \delta_Y \mid Y \in \mathrm{Irr}(\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}^+}) \}$ は，ある W-graph ([KL1] 参照) からくる Hecke 環の表現の基底を $q \mapsto 1$ と特殊化したものと一致する。」

そこで次の (C) が示されれば，(B) の反例の存在から (A) の反例の存在が導かれる。

「(C) 特殊表現の基底 $\{P_{y^{-1}} \mid y \in C_w^{LR}/\underset{R}{\sim}\}$ は，ある W-graph からくる Hecke 環の表現の基底を $q \mapsto 1$ と特殊化したものと定数倍を除いて一致する。」

(C)は次の様にして示される。σ を特殊表現，V を σ を含む両側 cell 表現とし，V の左 cell 表現への分解を $V=\bigoplus_i V_i$ とする。V は $W\times W$-加群で各 V_i は $1\times W$-部分加群である。$1\times W$ の V への作用により V を W-加群と思って $\mathrm{Hom}_W(\sigma, V)$ を考える。$W\times 1$ の V への作用により，これは W-加群になり，しかも $\sigma \simeq \mathrm{Hom}_W(\sigma,V)=\bigoplus_i \mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)$ となる。また $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)=1$ である。[Gy]によりある W-graph があって，これに対応する Hecke 環の表現 $\tilde{\sigma}$ を $q\mapsto 1$ と特殊化したものは σ と同型。さらに W-graph から定まる $\tilde{\sigma}$ の基底を $q\mapsto 1$ と特殊化したものはある $\mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i)$ を張る。さて，[$y_1 \underset{LR}{\geq} y_2$, $y_1 \underset{LR}{\not\sim} y_2 \Rightarrow \deg P_{y_1} < \deg P_{y_2}$] なので V から σ への，W-加群としての全射準同型 φ があって，$\dim \varphi(V_i)=1$。また $\varphi(V_i)$ はある $P_{y^{-1}}$ により張られる。$x\in\sigma, x\neq 0$ をひとつとるとき $\mathrm{Hom}_W(\sigma,V) \xrightarrow{F_x} \sigma$ $(f\longmapsto \varphi(f(x)))$ は W-加群としての同型写像。定義から明らかに，$F_x(\mathrm{Hom}_W(\sigma,V_i))=\varphi(V_i)$。よって(C)が示された。

REFERENCE

[ALS] Alvis, D., Lusztig, G., Spaltenstein, N. : On Springer's correspondence for simple groups of type E_n (n=6,7,8). Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 92, 65-78 (1982)

[BV1] Barbasch, D., Vogan, D. : Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups. Math. Ann. 259, 153-199 (1982)

[BV2] ———, ——— : Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups. J. Algebra 80, 350-382 (1983)

[BeB] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de g-modules. Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)

[BoB1] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. Invent. Math. 69, 437-476 (1982)

[BoB2] ———, ——— : ——————————. III. Invent. Math. 80, 1-68 (1985)

[BM] ———, MacPherson, R. : Representations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les varietes de nilpotents. Comptes Rendus 292, 707-710 (1981)

[BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)

[D] Duflo, M. : Sur la classification des ideaux primitifs dans l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple. Ann. Math. 105, 107-120 (1977)

[Gi] Ginsburg, V. : g-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Preprint, Moscow (1984)

[Gy] Gyoja, A. : On the existence of a W-graph for an irreducible representation of a Coxeter group. J. Algebra 86 422-438 (1984)

[H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations. Tohoku Math. J. 36, 49-74 (1984)

[J1] Joseph, A. : W-module structue in the primitive spectrum of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. In: Noncommutative harmonic analysis, Lecture Notes in Math.. 728 116-135. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979

[J2] ——— : Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II. J. Algebra 65, 269-316 (1980)

[J3] ——— : On the variety of a highest weight module. J. Algebra 88, 238-278 (1984)

[J4] ——— : On the associated variety of a primitive ideal. J. Algebra 93, 509-523 (1985)

[KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold -related to the Weyl group algebra. Invent. Math. 77, 185-198 (1984)

[KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. Invent. Math. 53, 165-184 (1979)

[KL2] ———, ——— : A topological approach to Springer's representations. Adv. Math. 38, 222-228 (1980)

[L] Lusztig, G. : Green polynomials and singularities of unipotent classes. Adv. Math. 38, 169-178 (1981)

[LV] ———, Vogan, D. : Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds. Invent. Math. 71, 365-379 (1983)

[M] Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8. Tokyo J. Math. 3, 391-461 (1980)

[Sh1] Shoji, T. : On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. Comm. Alg. 7, 1713-1745 (1979), Correction Comm. Alg. 7, 2027-2033 (1979)

[Sh2] ——— : On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4. Comm. Alg. 8, 409-440 (1980)

[Sh3] ——— : On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4. Comm. Alg. 10, 505-543 (1982)

[Spa] Spaltenstein, N. : On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. Topology 19, 203-204 (1977)

[Spr] Springer, T. A. : Quelque applications de la cohomologie d'intersection. Seminaire Bourbaki, expose 589. Asterisque 92-93, 249-273 (1982)

[St] Steinberg, R. : On the desingularization of the unipotent variety. Invent. Math. 36, 209-224 (1976)

[T1] Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. Tohoku Math. J. 34, 575-585 (1982)

[T2] ——— : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. Adv. Studies in Pure Math. 6, 139-154 (1985)

[V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra. Math. Ann. 248, 195-203 (1980)